

Zestaw 12: Całki wielokrotne II

Zad 1) Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:
 $z = y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Zad 2) Wykorzystując współrzędne biegunowe oblicz:

a) $\int\int_D x^2 + y^2 dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0\}$;

b) $\int\int_D x^2 + y^2 dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq x, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$;

c) pole obszaru ograniczonego krzywymi $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$,
 $y = 0$.

Zad 3) Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:
 $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 6 - x^2 - y^2$.

Zad 4) Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:
 $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$.

Zad 5) Wyznacz masę bryły $\Omega = \{(x, y, z) : R_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_2^2, z \geq 0\}$,
której gęstość w punkcie (x, y, z) jest równa odległości tego punktu od płaszczyzny xy .

Zad 6) Oblicz $\int\int\int_V z dx dy dz$, gdzie $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$.

Zad 7) Oblicz masę bryły ograniczonej powierzchniami $z = 2 - x^2 - y^2$
oraz $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, wiedząc, że gęstość w punkcie (x, y, z) jest równa kwadratowi odległości tego punktu od osi z .

Zad 8) Oblicz objętość bryły $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, z \leq 1, z \geq 0\}$.

Zad 9) Oblicz $\int\int\int_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$, gdzie $V = \{(x, y, z) : z \geq 0, x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Zad 10) Wyznacz pole płata powierzchniowego wyciętego:

a) walcem $x^2 + y^2 = 4$ z walca $x^2 + z^2 = 4$;

b) walcem $x^2 + y^2 = x$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

c) walcem $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ ze stożka $y^2 + z^2 = x^2$;

d) walcem $x^2 + y^2 = 1$ z paraboloidy hiperbolicznej $z = xy$.

Zad 11) Oblicz objętość części wspólnej kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ i walca $x^2 + y^2 \leq Rx$.

Zad 12) Wyznacz objętość obszaru ograniczonego powierzchniami: $x^2 + y^2 = z^2$, $z = \frac{3}{2}$ ($z \leq \frac{3}{2}$), $x^2 + y^2 = 4(z - 1)$.